MATEMÁTICA FINANCEIRA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Prof. Albérico Henrique

EdiCase digital

CONCURSOS E VESTIBULARES

Números proporcionais

Juros Simples e Composto

Porcentagem

Termos da matemática financeira

Questões resolvidas

JUROS - INVESTIMENTO
INFLAÇÃO - EMPRÉSTIMO

Expediente

EDICASE
Gestão de Negócios

Direção Geral
Joaquim Carqueijó

Gestão de Canais
Vanusa Batista e Wellington Oliveira

Gestão Administrativa Financeira
Elisiane Freitas, Vanessa Pereira,
e Pedro Moura

Mídias Digitais
Clausilene Lima e Sergio Laranjeira

Distribuição em Bancas e Livrarias
Total Express Publicações (Grupo Abril)

TOTAL publicações | uma empresa Abril

EDICASE EUROPA

Sócia-gerente
Adriana Andrade
geral@edicase.pt

EDICASE
publicações

Publisher
Joaquim Carqueijó

Produção Editorial
Tami Oliveira

Redação
Matilde Freitas (MTB 67769/SP)
e Saula Lima (MTB 82535/SP)

Design
Ligia Fagundes

Atendimento ao Leitor
Redação
atendimento@caseeditorial.com.br

Edições Anteriores
www.caseeditorial.com.br

Vendas no Atacado
(11) 3772-4303 - ramal 209
vanusa@edicase.com.br

Produto desenvolvido por:

Editora Filiada

ANER
www.aner.org.br

PROIBIDA A REPRODUÇÃO
total ou parcial sem prévia autorização da editora.

PRESTIGIE O JORNALEIRO:
compre sua revista na banca

www.caseeditorial.com.br | /caseeditorial

01. Introdução

Entre as diversas aplicações da Matemática, está a de resolver problemas de ordem financeira, como calcular os valores das prestações, pagamento de impostos, rendimento de poupança e diversas outras situações.

02. Números Proporcionais

O número 3 representa a metade de 6, o mesmo que 5 representa em relação a 10 (metade), que também é o mesmo que 8 representa em relação a 16 (metade).

Dizemos que os números 3, 5 e 8 são diretamente proporcionais a 6, 10 e 16, nessa ordem.

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16} \quad \text{ou} \quad \frac{3+5+8}{6+10+16} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Neste exemplo, $\frac{1}{2}$ é considerado o **<u>coeficiente de proporcionalidade</u>**.

Para ficar mais claro, explicaremos de uma forma mais prática.

$\frac{3}{6}$ → 3 reais divididos para 6 pessoas, cada uma ganhará 0,50 centavos.

$\frac{5}{10}$ → 5 reais divididos para 10 pessoas, cada uma ganhará 0,50 centavos.

$\frac{8}{16}$ → 8 reais divididos para 16 pessoas, cada uma ganhará 0,50 centavos.

Isso acontece porque 3, 5 e 8 são diretamente proporcionais a 6, 10 e 16, nessa ordem.

DIRETAMENTE PROPORCIONAL

Podemos dizer que os números reais não-nulos a, b, c, d, ..., n são diretamente proporcionais aos números a', b', c', d', ..., n', nessa ordem, se e somente se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots = \frac{n}{n'}$$

Temos que prestar atenção em duas coisas:

- a fração irredutível equivalente a $\frac{a}{a'}$ é chamada de coeficiente de porporcionalidade (K);
- a fração $\frac{a + b + c + d + \ldots + n}{a' + b' + c' + d' + \ldots + n'} = K$

INVERSAMENTE PROPORCIONAL

Os números reais não-nulos a, b, c, d, ..., n são inversamente proporcionais aos números reais a', b', c', d', ..., n', nessa ordem, da seguinte forma:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \frac{n}{\frac{1}{n'}} \quad \text{ou} \quad a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = n \cdot n'$$

EXEMPLO 1

Verifique se os números 5, 10 e 15 são diretamente proporcionais a 30, 60 e 75, nessa ordem.

Solução

A ordem sugerida foi $\frac{5}{30}$, $\frac{10}{60}$, $\frac{15}{75}$.

Vamos simplificar cada fração. Se suas frações irredutíveis forem iguais, então serão diretamente proporcionais.

$\frac{5}{30}$: 5 = $\frac{1}{6}$ ← fração irredutível

$\frac{10}{60}$: 10 = $\frac{1}{6}$ ← fração irredutível

$\frac{15}{75}$: 5 = $\frac{3}{15}$: 3 = $\frac{1}{5}$ ← fração irredutível

Como: $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{5}$ (não são diretamente proporcionais)

EXEMPLO 2

Os números 27, 12 e x são proporcionais aos números y, 36 e 15, nessa ordem. Encontre x e y.

Solução

$$\frac{27}{y} = \frac{12}{36} = \frac{x}{15} \rightarrow \frac{12}{36} : 2 = \frac{6}{18} : 2 = \frac{3}{9} : 3 = \frac{1}{3}$$

Então podemos fazer:

$$\frac{27}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{27 \,.\, 3}{1} = \frac{81}{1} = 81 \qquad y = 81$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{1\,.\,15}{3} = \frac{15}{3} = 5 \qquad x = 5$$

Portanto, x = 5 e y = 81

EXEMPLO 3

Encontre o valor de x e y, sabendo que os números 9, x e 2 são inversamente proporcionais aos números 4, 6 e y, nessa ordem.

Solução

$$\frac{9}{\frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{y}} \rightarrow \frac{36}{1} = \frac{6x}{1} = \frac{2y}{1} \rightarrow 36 = 6x = 2y$$

Então:

$$36 = 6x \rightarrow x = \frac{36}{6} = 6 \qquad x = 6$$

$$36 = 2y \rightarrow y = \frac{36}{2} = 18 \qquad y = 18$$

Portanto, x = 6 e y = 18

DIVISÃO DE UMA QUANTIA EM PARTES PROPORCIONAIS

Preste atenção no seguinte problema:

EXEMPLO 1

Três sócios tiveram a seguinte participação em um negócio: o primeiro investiu R$ 5.000,00, o segundo R$ 4.000,00 e o terceiro R$ 2.000,00. Ao final de dois meses obtiveram um lucro de R$ 3.300,00. Quanto lucrou cada sócio?

Solução

Problema deste tipo, o lucro deve ser repartido de forma diretamente proporcional à quantia que cada um investiu.

Vamos chamar o primeiro, segundo e terceiro sócios de A, B e C respectivamente.

$$\frac{A}{5000} = \frac{B}{4000} = \frac{C}{2000}$$

$$\rightarrow \frac{A + B + C}{5000 + 4000 + 2000} = \frac{3300}{11000} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{A}{5000} = \frac{3}{10} \rightarrow A = \frac{5000 \,.\, 3}{10} = 500 \,.\, 3 = 1500$$

$$\frac{B}{4000} = \frac{3}{10} \rightarrow B = \frac{4000 \,.\, 3}{10} = 400 \,.\, 3 = 1200$$

$$\frac{C}{2000} = \frac{3}{10} \rightarrow B = \frac{2000 \,.\, 3}{10} = 200 \,.\, 3 = 600$$

O primeiro sócio receberá R$ 1.500,00, o segundo R$ 1.200,00 e o terceiro R$ 600,00.

Exemplo 2

Reparta o número 364 em parcelas proporcionais aos números 16, 40, 32 e 24.

Solução

$$\frac{a}{16} = \frac{b}{40} = \frac{c}{32} = \frac{d}{24} \rightarrow \frac{364}{16 + 40 + 32 + 24} \rightarrow \frac{364}{112}$$

$$\frac{364}{112} : 2 = \frac{182}{56} : 2 = \frac{91}{28} : 7 = \frac{13}{4}$$

Então:

$$\frac{a}{16} = \frac{b}{40} = \frac{c}{32} = \frac{d}{24} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{a}{16} = \frac{13}{4} \rightarrow a = \frac{16 \,.\, 13}{4} = 4 \,.\, 13 = 52$$

$$\frac{b}{40} = \frac{13}{4} \rightarrow b = \frac{40 \,.\, 13}{4} = 10 \,.\, 13 = 130$$

$$\frac{c}{32} = \frac{13}{4} \rightarrow c = \frac{32 \,.\, 13}{4} = 8 \,.\, 13 = 104$$

$$\frac{d}{24} = \frac{13}{4} \rightarrow d = \frac{24 \,.\, 13}{4} = 6 \,.\, 13 = 78$$

Logo: $\frac{52}{16} = \frac{130}{40} = \frac{104}{32} = \frac{78}{24}$

Exemplo 3

Reparta a quantia de R$ 945,00 em partes inversamente proporcionais aos números 6 e 8.

Solução

$$\frac{A}{\frac{1}{6}} = \frac{B}{\frac{1}{8}} = \frac{945}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4+3}{1} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{6A}{1} = \frac{8B}{1} = \frac{945 \,.\, 24}{7}$$

$$6A = 8B = 135 \,.\, 24$$

$$6A = 8B = 3240$$

$$6A = 3240$$

$$A = \frac{3240}{6} = 540$$

$$8B = 3240$$

$$B = \frac{3240}{8} = 405$$

Logo, A = R$ 540,00 e B = R$ 405,00.

Exemplo 4

Alberto e Bruno são sócios. Ao final de um investimento lucraram R$ 4.900,00 e cada um receberá proporcionalmente ao que investiram. Sabemos que Bruno investiu R$ 2.000,00 a mais que Alberto e seu lucro foi de R$ 700,00 a mais que o de Alberto. Quanto cada um investiu nesse negócio?

Solução

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{x + 2000} = \frac{4900}{2x + 2000}$$

$$\frac{A}{x} = \frac{A + 700}{x + 2000} = \frac{4900}{2x + 2000}$$

Como Bruno lucrou 700 a mais que Alberto podemos escrever: B = A + 700

Sabemos que: $A + A + 700 = 4900$

$$\rightarrow 2A = 4900 - 700$$

$$\rightarrow A = \frac{4200}{2}$$

$$\rightarrow A = 2100$$

Como: $B = A + 700$

$$\rightarrow B = 2100 + 700$$

$$\rightarrow B = 2800$$

Agora podemos escrever:

$$\frac{2100}{x} = \frac{2800}{x + 2000} = \frac{4900}{2x + 2000}$$

$$\frac{2100}{x} = \frac{2800}{x + 2000} \rightarrow 2800x = 2100x + 4200000$$

$$\rightarrow 2800x - 2100x = 4200000$$

$$\rightarrow 700x = 4200000$$

$$\rightarrow x = \frac{42000\cancel{00}}{7\cancel{00}}$$

$$\rightarrow x = 6000$$

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{x + 2000} \rightarrow \frac{A}{6000} = \frac{B}{6000 + 2000}$$

$$\rightarrow \frac{A}{6000} = \frac{B}{8000}$$

Alberto investiu R$ 6.000,00 e Bruno R$ 8.000,00.

03. Porcentagem

A porcentagem é uma forma usada para indicar uma fração de denominador 100 ou outra representação equivalente. Veja os seguintes exemplos:

a) $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 0{,}5$ (metade)

b) $100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$ (tudo)

c) $9\% = \frac{9}{100} = 0{,}09$

d) $120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5} = 1{,}20$ ou $1{,}2$

e) $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

f) $200\% = \frac{200}{100} = \frac{2}{1} = 2$ (dobro)

g) $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

h) $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

i) $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

PORCENTAGEM DE UMA QUANTIA

Uma TV 42” está com o preço de R$ 3.200,00 que pode ser parcelado em até 10x. À vista o cliente recebe um desconto de 15%. Quanto é o valor do desconto e quanto é o valor da TV à vista?

Solução

Para calcularmos a porcentagem de uma quantia, existem várias formas. → $15\% = \frac{15}{100} = 0,15$

Precisamos calcularmos 15% de um certo valor, então multiplicamos $\frac{15}{100}$ ou 0,15 por este valor.

$$\frac{15}{100} \cdot 3200 = 15.32 = 480$$

Com R$ 480,00 de desconto, à vista a TV fica por:

$$3200 - 480 = 2720$$

Concluimos que 15% de R$ 3.200 é R$ 480,00 então a TV custa R$ 2.720,00 à vista.

EXEMPLO 1

Vamos calcular 45% de R$ 80,00 das maneiras mais práticas.

Podemos fazer:

$$\frac{45}{100} \cdot 80 = \frac{360}{10} = 36$$

Ou fazemos:

$$45\% = \frac{45}{100} = 0,45$$

$$0,45 \cdot 80 = 36$$

Veremos agora, de maneira bem prática, como encontrar o valor procurado depois de um desconto ou um acréscimo, que é dado em geral por causa dos juros.

a) Calcule o valor de um celular que custa R$ 360,00 após um desconto de 10%.

Solução

Tudo, significa que é 100%, então: R$ 360,00 = 100%

Após 10% de desconto o valor do celular será 90% (100% - 10%). Então podemos escrever direto:

$\frac{90}{100} . 360 = 324$ ou podemos fazer também $0{,}90 . 360 = 324$

O celular custará R$ 324,00.

b) Um cliente foi pagar uma parcela atrasada no valor de R$ 550,00 mais uma multa de 3%. Quanto o cliente pagou?

Solução

Para economizar cálculos e tempo, o que é muito importante em Concursos e Vestibulares, podemos fazer logo:

$$1{,}03 . 550 = 566{,}5 \quad \text{ou} \quad \frac{103}{100} . 550 = 566{,}5$$

O cliente pagará R$ 566,50.

Lembre-se: Desconto = Subtração do valor real
Multa = Acréscimo = Adição no valor real

EXEMPLO 2

Uma geladeira, cujo preço à vista é R$ 680,00, tem um acréscimo de 5% no seu preço se for paga em 3 prestações iguais. Qual é o preço de cada prestação?

Solução

5% de 680 = $\frac{5}{100} \cdot 680 = \frac{340}{10}$ = 34 (valor do acréscimo)

680 + 34 = 714 (preço total após o acréscimo)

714:3 = 238 (valor de cada prestação)

O valor de cada prestação é de R$ 238,00.

EXEMPLO 3

O salário de um trabalhador era de R$ 840,00 e passou a ser de R$ 966,00. Qual doi a porcentagem de aumento?

Solução

? % de 840 = 966

$$x \cdot 840 = 966$$

$$x = \frac{966}{840}$$

$$x = 1{,}15 \text{ ou } \frac{115}{100}$$

Lembrando que x = 1 + 0,15

valor do salário (1) — valor do aumento (0,15)

Logo, o aumento foi de 15%.

EXEMPLO 4

André gastou 40% do que tinha e ainda sobrou R$ 87,00. Quanto ele tinha e qual foi o valor que gastou?

Solução

Vamos considerar que ele tinha "x". Então:

$$x - \frac{40}{100} \cdot x = 87$$

$$x - \frac{4\not{0}x}{10\not{0}} \cdot x = 87$$

$$x - \frac{4x}{10} \cdot x = 87$$

$$\frac{10x - 4x}{10} = 87$$

$$6x = 87 \cdot 10$$

$$6x = 870$$

$$x = \frac{870}{6}$$

$$x = 145$$

Ou então podemos fazer:

Se ele gastou 40%, ainda tem 60%

$$\frac{60}{100} \text{ de } x = 87$$

$$\frac{60}{100} \cdot x = 87$$

$$x = \frac{87 \cdot 10\not{0}}{6\not{0}}$$

$$x = 145$$

Ele gastou 145 - x = 87

→ $x = 145 - 87$

→ $x = 58$

Logo, ele tinha R$ 145,00 e gastou R$ 58,00.

EXEMPLO 5

Laura gastou R$ 900,00 na compra de uma bicicleta, de um aparelho de som e de uma estante. A bicicleta custou R$ 60,00 a menos que a estante e o preço do aparelho de som corresponde a 80% do preço da bicicleta. Quanto custou cada um?

Solução

b ← bicicleta
e ← estante
s ← aparelho de som

$$\begin{cases} b + e + s = 900 \\ b + 60 = e \quad \text{(R\$ 60,00 a menos que a estante)} \\ s = \dfrac{80b}{100} \quad \text{(80\% da bicicleta)} \end{cases}$$

Vamos inserir as duas últimas equações na primeira. Como temos "b" nas duas últimas, isolaremos a outra variável.

$b + 60 = e \rightarrow e = b + 60$

$s = \dfrac{80b}{100} \rightarrow s = \dfrac{4b}{5}$

Podemos escrever:

$b + e + s = 900$

$b + b + \dfrac{4b}{5} = 900 - 60$

$2b + \dfrac{4b}{5} = 840$

$\dfrac{10b + 4b}{5} = 840$

$\dfrac{14b}{5} = 840$

$b = \dfrac{840 \,.\, 5}{14}$

$b = 300$

Então:

$e = b + 60$

$e = 300 + 60$

$e = 360$

$s = \dfrac{4b}{5}$

$s = \dfrac{4 \,.\, 300}{5}$

$s = 240$

O valor da bicicleta é R$ 300,00, da estante R$ 360,00 e do aparelho de som R$ 240,00.

04. Termos da Matemática Financeira

A quantia (capital) que uma pessoa aplica na caderneta de poupança por um determinado período (tempo), lhe renderá um certo valor (juros) que, somado com o capital aplicado, dá um total (montante). O valor a ser ganho depende da porcentagem (taxa de juros).

Ao final do período, a pessoa terá um montante:

$$\boxed{\text{Montante} = \text{Capital} + \text{Juros}}$$

De forma prática, vamos ver o exemplo à seguir:

EXEMPLO 1

O banco ABC oferece rendimento de 1,2% ao mês. Aplicando-se R$ 600,00 neste banco, depois de um mês, que quantia o cliente terá em sua conta?

Solução

$$1{,}2\% \text{ de } 600 = \frac{1{,}2}{1\cancel{00}} \cdot 6\cancel{00} = 7{,}2 \text{ (juros)}$$

600 (capital) + 7,2 (juros) = 607,2 (montante)

No fim de um mês de aplicação, a quantia total na conta do cliente será de R$ 607,20.

Neste exemplo temos:
- c = Capital = R$ 600,00
- t = Tempo = 1 mês
- i = Taxa de juros = 1,2% ao mês
- j = Juros = R$ 7,20
- m = Montante = R$ 607,20

05. Juros simples

Um determinado capital aplicado à taxa de 2% de juros simples ao mês, durante 5 meses, rende 10% do capital no final desses 5 meses, ou seja, 5 vezes 2%.

Temos que levar em consideração que a taxa e o tempo devem se referir à mesma unidade de tempo (% ao mês e meses ou % ao dia e dias, % ao ano e anos e assim por diante).

No cálculo do juros simples, duas fórmulas são importantes para simplificar os cálculos:

$$J = C \cdot i \cdot t \qquad M = C\,(1 + i \cdot t)$$

Onde: J = Juros
C = Capital
i = Taxa de juros
t = Tempo
M = Montante

Observação: quando realizarmos os cálculos, as unidades de tempo e taxa devem estar nas mesmas unidades.

EXEMPLO 1

O capital de R$ 530,00 foi aplicado à taxa de juros simples de 3% ao mês. Qual o valor do montante após 5 meses?

Solução

$$3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$$

$M = C\,(1 + i \cdot t)$
$M = 530\,(1 + 0{,}03 \cdot 5)$
$M = 530\,(1 + 0{,}15)$
$M = 609{,}5$

Após 5 meses o montante será de R$ 609,50

EXEMPLO 2

Foi tomado um empréstimo de R$ 1000,00. Ao final de 2 meses foi pago um total de R$ 1200,00 pelo empréstimo. Quais foram os juros pagos e a taxa de juros simples?

Solução

$J = C \cdot i \cdot t$ $J = M - C$

Calculemos primeiro o Juros: $J = M - C$

→ $J = 1200 - 1000$

→ $J = 200$

Como: $J = C \cdot i \cdot t$

→ $200 = 1000 \cdot i \cdot 2$

→ $200 = 2000 \cdot i$

→ $i = \dfrac{200}{2000}$

→ $i = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ ou 10%

Os juros foram de R$ 200,00 e a taxa foi de 10% ao mês.

EXEMPLO 3

Um capital de R$ 600,00 aplicado à taxa de juros simples de 20% ao ano, gerou um montante de R$ 1080,00 depois de certo tempo. Qual foi esse tempo?

Solução

Aplicaremos $M = C\,(1 + i \cdot t)$

$M = C\ (1 + i\ .\ t)$

➔ $1080 = 600\ (1 + 0{,}2\ .\ t)$

$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$

➔ $1080 = 600 + 120t$

➔ $1080 - 600 = 120t$

➔ $480 = 120t$

➔ $\frac{480}{120} = t$

➔ $t = 4$ anos

Como a taxa é 20% ao ano, então o tempo também será ano.

A tempo foi 4 anos.

EXEMPLO 4

Qual foi o capital que, aplicado à taxa de juros simples de 1,5% ao mês, rendeu R$ 90,00 em um trimestre?

Solução

Temos que entender o seguinte: rendeu = juros
um trimestre = 3 meses

$J = C\ .\ i\ .\ t$

➔ $90 = C\ .\ 0{,}015\ .\ 3$

$1{,}5\% = \frac{1{,}5}{100} = 0{,}015$

➔ $90 = C\ .\ 0{,}045$

➔ $\frac{90}{0{,}045} = C$

➔ $C = 2000$

O capital foi de R$ 2000,00.

EXEMPLO 5

A que taxa devemos aplicar o capital de R$ 4500,00 no sistema de juros simples, para que, depois de 4 meses o montante seja de R$ 5040,00?

Solução

$$M = C\,(1 + i \,.\, t)$$

$5040 = 4500\,(1 + i \,.\, 4)$

→ $\dfrac{5040}{4500} = 1 + 4i$

→ $1{,}12 = 1 + 4i$

→ $1{,}12 - 1 = 4i$

→ $0{,}12 = 4i$

→ $\dfrac{0{,}12}{4} = i$

→ $i = 0{,}03$ ou 3%

Devemos aplicar a taxa de 3% ao mês.

06. Juros compostos

Um determinado capital de R$ 40.000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês, durante 3 meses. Qual foi o montante no final dos 3 meses?

Solução

Como estamos tratando de juros sobre juros (juros compostos), devemos aplicar a taxa sobre o montente no início de cada mês.

Mês	$M = C (1 + i \cdot t)$
1º	$M = 40.000 (1 + 0{,}02 \cdot 1) = 40.800$
2º	$M = 40.800 (1 + 0{,}02 \cdot 1) = 41.616$
3º	$M = 41.616 (1 + 0{,}02 \cdot 1) = 42.448{,}32$

Ao final do 3º mês temos um montante de R$ 42.448,32.

Este método não é viável para períodos longos. Ao invés disso, podemos usar uma fórmula para deduzir o montante acumulado sobre uma taxa de juros compostos.

FÓRMULA DO JUROS COMPOSTOS

Podemos calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante(M), produzido por um capital(C), aplicado à taxa(i), durante um determinado tempo(t).

$$M = C (1 + i)^t$$

O problema anterior poderia ser resolvido da seguinte forma:

$M = C(1 + i)^t$

→ $M = 40.000\,(1 + 0{,}02)^3$

→ $M = 40.000\,(1{,}02)^3$

→ $M = 40.000 \,.\, 1{,}061208$

→ $M = 42.448{,}32$

EXEMPLO 1

Quanto receberá de juros, no fim de um semestre, uma pessoa que investiu, a juros compostos, a quantia de R$ 6000,00 à taxa de 1% ao mês?

Solução

$M = C(1 + i)^t$

→ $M = 6000\,(1 + 0{,}01)^6$

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

1 semestre = 6 meses

→ $M = 6000\,(1{,}01)^6$

→ $M = 6000 \,.\, 1{,}0615201506$

→ $M = 6369{,}12$

Como trabalhamos com dinheiro, arredondamos para duas casas decimais.

Como: Juros = Montante - Capital → $J = M - C$

→ $J = 6369{,}12 - 6000$

→ $J = 369{,}12$

Receberá de juros R$ 369,12.

Exemplo 2

Qual deve ser o capital que no sistema de juros compostos, a taxa de 20% ao ano gera um montante de R$ 14400,00 no fim de 2 anos?

Solução

$$M = C\,(1 + i)^t$$

$$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

→ $14400 = C\,(1 + 0{,}2)^2$

→ $14400 = C\,(1{,}2)^2$

→ $14400 = C \,.\, 1{,}44$

→ $\frac{14400}{1{,}44} = C$

→ $C = 10.000$

O capital será de R$ 10.000,00.

Exemplo 3

O capital de R$ 2000,00, aplicado a juros compostos, rendeu, após 4 meses, juros de R$ 165,00. Qual foi a taxa de juros?

Solução

$$M = C + J$$

→ $M = 2000 + 165$

→ $M = 2165$

Então:

$$M = C\,(1 + i)^t$$

➔ $2165 = 2000\,(1 + i)^4$

➔ $\frac{2165}{2000} = (1 + i)^4$

➔ $\frac{433}{400} = (1 + i)^4$

➔ $1{,}0825 = (1 + i)^4$

➔ $\sqrt[4]{1{,}0825} = 1 + i$

➔ $1{,}020015981 = 1 + i$

➔ $1{,}020015981 - 1 = i$

➔ $i = 0{,}020015981$ ou $2{,}0015981\%$ ao mês

A taxa foi de 2,0015981% ao mês.

Exemplo 4

Uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R$ 4000,00, usando o que tem depositado na caderneta de poupança, que está rendendo 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual plano de pagamento é mais vantajoso:

- Pagar à vista;
- Pagar em duas prestações iguais de R$ 2005,00 cada, a segunda parcela será paga com 30 dias.

Solução

Se ela pagar à vista sobrará zero.

Pagando em 2 x de R$ 2005,00, após o pagamento da primeira sobra 4000 - 2005 = 1995.

Ficando R$ 1995,00 na caderneta com juros de 1% teremos em 1 mês:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

→ $M = 1995\,(1 + 0{,}01)^1$

→ $M = 1995\,(1{,}01)^1$

→ $M = 1995 \cdot 1{,}01$

→ $M = 2014{,}95$

Dessa forma é mais vantajoso pagar em 2 vezes.

EXEMPLO 5

Maria tomou um empréstimo de R$ 150.000,00 a juros de 12% ao ano. Qual será a dívida de Maria após 3 anos?

Solução

$$M = C(1 + i)^t$$

→ $M = 150000\,(1 + 0{,}12)^3$

→ $M = 150000\,(1{,}12)^3$

→ $M = 150000 \cdot 1{,}404928$

→ $M = 210739{,}2$

A dívida será de R$ 210.739,20.

07. Questões Resolvidas

1. (VUNESP) Se a taxa de inflação de janeiro é de 6% e a de fevereiro é de 5%, então a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de:

a) 11% b) 11,1% c) 11,2% d) 11,3% e) 11,4%

Solução

Esse tipo de problema pode ser resolvido de foma bem prática se tomarmos como base o número 100.

Aplicando 6% em cima de 100 temos:

$$100 \; . \; 1{,}06 = 106$$

6 é **6% de 100**

Agora, 5% em cima de 106:

$$106 \; . \; 1{,}05 = 111{,}3$$

Em relação a 100, o número 111,3 possui 11,3% a mais.

Resposta: d

2. (UNICAMP-SP) Uma pessoa investiu R$ 3000,00 em ações. No primeiro mês ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido. Com quantos reais ela ficou após os dois meses?

a) R$ 2000,00
b) R$ 2060,00
c) R$ 2160,00
d) R$ 2220,00
e) R$ 2310,00

Solução

Se ela perdeu 40%, então:

40% de $3000 = \frac{40}{100} \cdot 3000 = 1200$ ← **Perdeu R$ 1200,00**

Se ela recuperou 30% do que havia perdido, então:

30% de $1200 = \frac{30}{100} \cdot 1200 = 360$ ← **Recuperou R$ 360,00**

Portanto, ela ficou com:

$$3000 - 1200 + 360 = \mathbf{2160}$$

Resposta: c

3. (UEL-PR) Em uma liquidação, os preços dos artigos de uma loja são reduzidos em 20% de seu valor. Terminada a liquidação e pretendendo voltar aos preços originais, de que porcentagem devem ser acrescidos os preços da liquidação?

a) 27,5% b) 25% c) 22,5% d) 21% e) 20%

Solução

A exemplo da questão 1, tomaremos o número 100 como base:

Se a mercadoria custa R$ 100,00 e diminui 20% de 100, ficaremos com R$ 80,00.

Agora iremos procurar a porcentagem para que, dado um aumento em cima de R$ 80,00, chegue a R$ 100,00.

Sabemos que devemos aumentar R$ 20,00, mas quantos porcento 20 é de 80?

Uma regra de três simples resolve o caso:

$$\begin{array}{lcl} 80 & \text{——} & 100\% \\ 20 & \text{——} & x\% \end{array}$$

$$x = \frac{20 \cdot 100}{80}$$

$$x = 25\%$$

Resposta: b

4. (UFRJ) Um lojista oferece 5% de desconto ao cliente que pagar suas compras à vista. Para calcular o valor do desconto, o vendedor usa sua máquina calculadora do seguinte modo:

Preço total	x	5	%	-

Um outro modo de calcular o valor com desconto seria multiplicar o preço total das mercadorias por:

a) 0,05 b) 0,5 c) 0,95 d) 1,05 e) 1,5

Solução

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

Se um produto sofre um desconto de 5%, seu valor ficará sendo 95%. Como queremos saber o valor do produto com o desconto, devemos multiplicar por 95% ou $\frac{95}{100}$.

$$95\% = \frac{95}{100} = 0{,}95$$

Resposta: c

5. (UNIFOR-CE) Em certa loja, cada produto vendido tem um acréscimo de 60% sobre o preço de custo. No entanto, como a loja deve recolher impostos correspondentes a 25% do preço de venda, seu percentual de lucro sobre o preço de custo é muito inferior a 60%. Esse percentual é de:

a) 35% b) 30% c) 25% d) 20% e) 15%

Solução

Algebricamente, o produto vale "x":

$$x + \frac{60x}{100} = \leftarrow \text{(produto mais 60\% do seu valor)}$$

$$= \frac{160x}{100} = \frac{16x}{10} = \frac{8x}{5}$$

$$\frac{8x}{5} - \frac{25}{100} \cdot \frac{8x}{5} \leftarrow \text{(tirando 25\% do valor de venda)}$$

$$\frac{8x}{5} - \frac{40x}{100} \rightarrow \frac{8x}{5} - \frac{2x}{5} = \frac{6x}{5}$$

$$\frac{6x}{5} = \frac{5x}{5} + \frac{x}{5} \rightarrow x + \frac{x}{5}\ \frac{\times 20}{\times 20} \rightarrow x + \frac{20x}{100}$$

Valor do produto | Percentual em cima do produto

$$\frac{20}{100} = 20\%$$

Uma outra forma de fazer:

$$x \,.\, 1{,}60 = 1{,}6x \leftarrow \text{(valor final de venda)}$$

Vamos tirar 25% do valor de venda e ver quanto fica, se tiramos 25%, sobra 75%.

$$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$1{,}6x \cdot 0{,}75 = x \cdot 1{,}2 \leftarrow \text{(valor final de venda)}$$

Valor do produto	0,2 valor da porcentagem do lucro

$$0{,}2 = \frac{20}{100} = 20\%$$

Uma terceira forma de fazer:

Vamos supor que o produto vale R$ 100,00.

100 + 60% de aumento = 160 ← (**60% de 100 é 60**)

Vamos tirar 25% de 160, vai sobrar 75%.

160 . 0,75 = 1<u>20</u>

R$ 20,00 de lucro, o que é 20% de 100%.

Resposta: d

6. (VUNESP) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por "x" reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoção, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda desse produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoção, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:

a) prejuízo de 10%
b) prejuízo de 5%
c) lucro de 20%
d) lucro de 25%
e) lucro de 30%

Solução

O valor do produto é "x".

$$x \cdot 1{,}50 = 1{,}5x \leftarrow (\textbf{valor do produto + 50\%})$$

Se tiramos 20% sobra 80%.

$$1{,}5x \cdot 0{,}80 = x \cdot 1{,}20$$

Valor do produto	0,20 valor da porcentagem do lucro

$$\text{Lucrou } 20\% \rightarrow 0{,}2 = \frac{20}{100} = 20\%$$

De forma mais clara, poderíamos resolver da seguinte maneira:

Vamos supor que o produto vale R$ 100,00.

$$100 + 50\% = 150 \leftarrow (\textbf{50\% de 100 é 50})$$

Agora tiramos 20% de 150. Se tiramos 20%, sobra 80%.

$$15\not{0} \cdot \frac{8\not{0}}{10\not{0}} = 120$$

O dono do supermercado ainda lucra R$ 20,00 o que é 20% de 100.

Resposta: c

7. (ENEM) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21000,00 e esse valor não será reajustado nos próximos mêses.
Ele tem R$ 20000,00 que podem ser aplicados a uma taxa de jurso compostos de 2% ao mês e escolhe deixar todo o ser dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.
Para ter o carro João deverá esperar:

a) dois meses e terá a quantia exata
b) três meses e terá a quantia exata
c) três meses e ainda sobrarão aproximadamente R$ 225,00
d) quatro meses e terá a quantia exata
e) quatro meses e ainda sobrarão aproximadamente R$ 225,00

Solução

$$M = C\,(1 + i)^t$$

→ $M = 200000\,(1 + 0{,}02)^t$ $\quad 2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$

→ $M = 20000\,(1{,}02)^t$

Vamos atribuir valores a "t" e ver quantos meses será necessário para que o montante atinja R$ 21000,00.

Para t = 1 → $M = 20000\,(1{,}02)^1$

$M = 20000 \,.\, 1{,}02$

$M = 20400$ (não dá para comprar o carro)

Para t = 2 → $M = 20000\,(1{,}02)^2$

$M = 20000 \,.\, 1{,}0404$

$M = 20808{,}00$ (não dá para comprar o carro)

Para t = 3 → $M = 20000\,(1{,}02)^3$

$M = 20000 \,.\, 1{,}061208$

$M = 21224{,}16$

Em 3 meses ele comprará o carro e ainda sobrará aproximadamente R$ 225,00.

Resposta: c

Sobre o Mestre

Albérico Henrique dos Santos, natural de Cortês - PE, estudou na rede pública de ensino, licenciado em Matemática pela Faculdade de Formação de Professores da Mata Sul, com experiência na rede pública de ensino. Autor do Artigo: “Matemágicos: Novos Jogos Somáticos” com conteúdo interativo disponível em www.geometricos.com.br. É também concurseiro e aprovado em 5 concursos públicos além de professor de Matemática, Física e Química.